2 vellen (3 pagina's)

Tentamen Talen en Automaten

23 augustus 2004, 14.00 –17.00 uur, Examenhal

Schrijf met blauwe of zwarte pen; *niet* met potlood en *niet* met rode pen. Voorzie alle bladen van je naam. Nummer de bladen en vermeld op het eerste blad het totale aantal.

Werk netjes. Formuleer je antwoorden zo compleet en tevens zo beknopt mogelijk. Je mag — tenzij expliciet anders aangegeven staat — direkt een beroep doen op (1) de stellingen uit het cursusmateriaal (*mits je ze goed formuleert*), (2) indien van toepassing: een (al dan niet bewezen) bewering uit een eerder onderdeel van de opgave in kwestie.

Advies. Lees het geheel van de opgaven eerst rustig door en verdeel de beschikbare tijd met beleid.

Opgave 1. Zij L de taal van alle strings over het alfabet $\{0,1\}$ die eindigen op 01.

(i) Construeer een reguliere expressie voor L. (Geef een beknopte toelichting.)

(ii) Construeer een NFA voor L. (Geef een beknopte toelichting.)

(iii) Zij A een willekeurige NFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Volgens de theorie is A om te zetten in een DFA A' met de eigenschap dat $L(A') = L(A)$. In de standaardconstructie neemt men: $A' = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$ met, om te beginnen, $Q' = \mathcal{P}(Q)$ en $\Sigma' = \Sigma$.

  (a) Schrijf zelf uit hoe in die standaardconstructie de overige componenten δ', q_0' en F' van A' verkregen worden uit de componenten van A.

  (b) Wat is het verband tussen $\hat{\delta}'$ en $\hat{\delta}$? (Een bewijs wordt hier niet gevraagd.)

(iv) Construeer een DFA voor L. (Geef een toelichting.)

Opgave 2.

(i) Toon aan dat de volgende taal $L \subseteq \{a\}^*$ *niet* regulier is:

$$L = \{\, a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } n \text{ is een kwadraat} \,\}$$

(ii) Beargumenteer — zonder al te zeer in detail te treden — dat deze taal L wel recursief is. Reproduceer om te beginnen de exacte definitie van de eigenschap "L is recursief".

Opgave 3. Zij Σ een of ander alfabet. Zij REG de verzameling van alle reguliere expressies (zonder variabelen) voor de beschrijving van talen over Σ.

(i) Reproduceer de inductieve definitie van REG.

(ii) De door $r \in \mathsf{REG}$ beschreven taal wordt aangegeven met $L(r)$. Reproduceer de definitie van $L(r)$ (met recursie naar de opbouw van r).

(iii) Inductief kan bewezen worden dat voor elke $r \in \mathsf{REG}$ geldt dat de taal $L(r)$ contextvrij is. Hieronder worden enkele onderdelen van dat bewijs gevraagd; bij (a) gaat het om de basis van het inductiebewijs.

7.0.2.

(a) Veronderstel dat $r \in \mathsf{REG}$ en dat r "atomair" is (in de zin dat r niet uit andere reguliere expressies samengesteld is). Toon aan dat $L(r)$ contextvrij is.

(b) Veronderstel: $r \in \mathsf{REG}$ en $s \in \mathsf{REG}$ en G_1 en G_2 zijn CFGs zodanig dat $L(G_1) = L(r)$ en $L(G_2) = L(s)$. Noteer: $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ en $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$. Laat zien dat er een CFG G bestaat zodanig dat $L(G) = L(rs)$. Je mag hier volstaan met de beschrijving van een passende constructie, zonder correctheidsbewijs, van G uit G_1 en G_2. Hierbij mag je gemakshalve aannemen dat $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. *Wat is de rol van deze laatste aanname?*

Opgave 4. Zij Σ het alfabet $\{a, b, c, d\}$. Definiëer de talen L_1 en L_2 over Σ door:

$$L_1 = \{a^j b^j c^k d^k \mid j, k \in \mathbb{N}\},$$

$$L_2 = \{a^j b^k c^k d^j \mid j, k \in \mathbb{N}\}$$

(i) Construeer een CFG voor L_1.

(ii) Construeer een CFG voor L_2.

(iii) Beargumenteer dat er ook een PDA voor L_2 is.

(iv) (a) Bepaal de doorsnede van L_1 en L_2.

(b) Met behulp van het pomplemma voor contextvrije talen kan bewezen worden dat deze doorsnede geen contextvrije taal is. Dat bewijs wordt hier *niet* gevraagd. Wel wordt hier gevraagd: de formulering van het pomplemma voor contextvrije talen.

(v) Beargumenteer dat er geen PDA voor de doorsnede van L_1 en L_2 bestaat.

Opgave 5. Definiëer voor elke willekeurige DFA A en elke willekeurige toestand q van A de DFA A_q door:

$$\text{Als } A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \text{ dan } A_q = (Q, \Sigma, \delta, q, F).$$

(Dus A_q heeft q als starttoestand en is verder, wat de overige componenten betreft, gelijk aan A.)

(i) Zij A een willekeurige DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definiëer de relatie $\sim$ op Q door:

$$q \sim r \iff \forall w \in \Sigma^* (\hat{\delta}(q, w) \in F \iff \hat{\delta}(r, w) \in F)$$

Toon aan dat voor alle $q, r \in Q$ geldt: $L(A_q) = L(A_r) \iff q \sim r$.

(ii) Beschouw nu in concreto de volgende DFA A:

$$A = (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b\}, \delta, 0, \{1, 4\}),$$

waarbij δ gegeven wordt door:

$$\delta(0, a) = 1,\ \delta(1, a) = 3,\ \delta(2, a) = 1,\ \delta(3, a) = 2,\ \delta(4, a) = 3,\ \delta(5, a) = 4,$$

$$\delta(0, b) = 2,\ \delta(1, b) = 4,\ \delta(2, b) = 0,\ \delta(3, b) = 5,\ \delta(4, b) = 1,\ \delta(5, b) = 2.$$

Teken het transitiediagram van A en bepaal een geminimaliseerde versie A' van A (d.w.z.: een equivalente DFA met een minimaal aantal toestanden). Teken vervolgens ook het transitiediagram van A'.

(iii) Zij A als in (ii) en zij $\sim$ de corresponderende relatie, zoals gedefiniëerd in (i). De in (ii) bedoelde constructie van A' levert $\sim$ (expliciet of impliciet) als bijprodukt. Hoe?

Zie verder pagina 3

(iv) Beschouw het volgende probleem P:

> Parameter: Een DFA A en toestanden q, r van A.
> Vraag: $L(A_q) = L(A_r)$?

Toon aan dat dit probleem P beslisbaar is. Reproduceer eerst de definitie van het hier gebruikte begrip "beslisbaar".

(v) Beschouw het volgende probleem Q:

> Parameter: Een DFA A en een DFA B met eenzelfde invoeralfabet.
> Vraag: $L(A) = L(B)$?

Bewijs (mogelijk op basis van de beslisbaarheid van P) dat dit probleem Q eveneens beslisbaar is.